Мы находим

$$\bar{a}^3_{12} = \frac{\alpha}{g_{33}-1}\, a^3_{12} \tag{7}$$

Т е о р е м а 4. Если поверхность V^*_3 отнесена к основанию почти конформного отображения $f: S_3 \to E_3$, то имеет место (7) и f переводит сеть линий кривизны σ_2 на V_2 в сеть линий кривизны $\bar{\sigma}_2 = f(\sigma_2)$ тогда и только тогда, когда $b^7_{12}=0$.

Т е о р е м а 5. Если поверхность V^*_3 отнесена к основанию почти конформного отображения $f: S_3 \to E_3$ и $b^7_{12} = 0$, то для того, чтобы сеть σ^*_3 была 3-сопряженной системой, необходимо и достаточно, чтобы f переводило 3-сопряженную систему σ_3 на S_3 в 3-сопряженную систему $\bar{\sigma}_3 = f(\sigma_3)$. При $b^7_{12}=0$ сети σ_3, $\bar{\sigma}_3$, σ^*_3 одновременно 3-сопряженные системы, если хотя бы одна из них – 3-сопряженная система.

Библиографический список

1. Г д о я н М.А.//Межвуз.сб.науч.тр. Ереван, 1985. Вып.3. С.126-137.

2. Г д о я н М.А.// Межвуз.сб.науч.тр. Ереван, 1986. Вып.4. С.57-60.

3. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств //Вопросы дифференциальной геометрии: Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина. М., 1970. № 374. С.41-51.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.75

ПОЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ТРЕХСОСТАВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

М.Ф.Г р е б е н ю к
(Киевское авиационное училище)

В данной работе инвариантным методом продолжений и охвато Г.Ф.Лаптева [1] строятся поля фундаментальных геометрических объектов распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве A_{n+1}. С помощью построенных полей фундаментальных геометрических объектов присоединены к $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределению внутренним инвариантным образом два однопараметрических пучка соприкасающихся гиперквадрик. В работе используются терминология и обозначения, введенные в работе [2].

1. Применяя первое и второе продолжения системы дифференциальных уравнений распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ в репере $\mathcal{R}^1$, а также другие результаты работы [2], последовательно строим следующие объекты:

$$\hat{a}_i = \frac{1}{r} A^p_{ip}, \quad \nabla \hat{a}_i = \hat{a}_{i\varkappa}\,\omega^\varkappa,$$

$$\hat{a}_\alpha = \frac{1}{r} A^p_{\alpha p}, \quad \nabla \hat{a}_\alpha - \hat{a}_i\,\omega^i_\alpha = \hat{a}_{\alpha\varkappa}\,\omega^\varkappa,$$

$$r_{pq} = \frac{1}{2}(\Lambda_{pq} - \Lambda_{qp}), \quad \nabla r_{pq} + r_{pq}\,\omega^{n+1}_{n+1} = r_{pq\varkappa}\,\omega^\varkappa,$$

$$a_{pqs} = \frac{1}{2}(\Lambda_{pqs} + \Lambda_{qps}), \quad \nabla a_{pqs} + a_{pqs}\,\omega^{n+1}_{n+1} - (a_{rq}\Lambda_{ps} + a_{pr}\Lambda_{qs} + a_{pq}\Lambda_{rs})\,\omega^r_{n+1} \equiv 0,$$

$$A_{pqs} = \frac{1}{3} a_{(pqs)}, \quad \nabla A_{pqs} + A_{pqs}\,\omega^{n+1}_{n+1} - a_{(pq}a_{s)r}\,\omega^r_{n+1} - \frac{1}{3} r_{r(p}a_{qs)}\,\omega^r_{n+1} \equiv 0,$$

$$\hat{a}_t = a^{pq} A_{pqt}, \quad \nabla_\delta \hat{a}_t - \frac{r+2}{3} r_{st}\,\pi^s_{n+1} - (r+2)\,a_{st}\,\pi^s_{n+1} = 0,$$

$$B_{pqs} = (r+2)A_{pqs} - a_{(pq}\hat{a}_{s)}, \quad \nabla_\delta B_{pqs} + B_{pqs}\,\pi^{n+1}_{n+1} = 0,$$

$$\hat B = a^{pq} a^{st} a^{\tau f} B_{ps\tau} B_{qtf}, \quad d\ln \hat B - \omega^{n+1}_{n+1} = \hat B_\varkappa \omega^\varkappa,$$

$$K_s = \Lambda_{sn+1} + \Lambda_{s\alpha} a^\alpha + \Lambda_{si} a^i, \quad \nabla K_s - \Lambda_{sp}\omega^p_{n+1} = K_{s\varkappa}\omega^\varkappa,$$

$$\mathcal{L}^p = -\Lambda^{ps} K_s, \quad \nabla \mathcal{L}^p - \mathcal{L}^p \omega^{n+1}_{n+1} + \omega^p_{n+1} = \mathcal{L}^p_\varkappa \omega^\varkappa,$$

$$A^p_s = \mathcal{L}^p_s - \mathcal{L}^p\mathcal{L}^q \Lambda_{qs} + A^p_{is} a^i + A^p_{\alpha s} a^\alpha, \quad \nabla A^p_s - A^p_s \omega^{n+1}_{n+1} = A^p_{s\varkappa}\omega^\varkappa,$$

$$K_i = M_{in+1} + M_{ij} a^j + M_{i\alpha} a^\alpha, \quad \nabla_\delta K_i = 0,$$

$$K_\alpha = H_{\alpha n+1} + H_{\alpha j} a^j + H_{\alpha\beta} a^\beta, \quad \nabla_\delta K_\alpha - K_i \pi^i_\alpha = 0,$$

$$K^p_i = A^p_{in+1} + A^p_{ij} a^j + A^p_{i\alpha} a^\alpha, \quad \nabla_\delta K^p_i - K^p_i \pi^{n+1}_{n+1} + K_i \pi^p_{n+1} - A^p_{iq}\pi^q_{n+1} = 0,$$

$$K^p_\alpha = A^p_{\alpha n+1} + A^p_{\alpha i} a^i + A^p_{\alpha\beta} a^\beta, \quad \nabla_\delta K^p_\alpha - K^p_\alpha \pi^{n+1}_{n+1} + K_\alpha \pi^p_{n+1} - A^p_{\alpha q}\pi^q_{n+1} - K^p_i \pi^i_\alpha = 0.$$

В общем случае $K = \det\|A^p_s\| \neq 0$. Это дает возможность ввести величины $\tilde A^s_q$, удовлетворяющие условиям

$$A^p_s \tilde A^s_q = \delta^p_q, \quad \nabla \tilde A^s_q + \tilde A^s_q \omega^{n+1}_{n+1} = \tilde A^s_{q\varkappa}\omega^\varkappa.$$

Рассмотрим определитель Λ_0:

$$\Lambda_0 = \det\|\Lambda_{pq}\|, \quad d\ln\Lambda_0 = 2\omega^p_p - \tau\omega^{n+1}_{n+1} + B_\varkappa\omega^\varkappa,$$

где

$$B_\varkappa = \Lambda^{pq}\Lambda_{qp\varkappa}, \quad \Lambda^{pq}\Lambda_{q\tau} = \delta^p_\tau.$$

Имеем

$$\nabla B_p - (\tau+2)\Lambda_{qp}\omega^q_{n+1} = \tilde B_{p\varkappa}\omega^\varkappa,$$

$$\nabla B_i - (\tau+2)\Lambda_{qi}\omega^q_{n+1} - \tau(M_{ji}\omega^j_{n+1} + H_{\alpha i}\omega^\alpha_{n+1}) = \tilde B_{i\varkappa}\omega^\varkappa,$$

$$\nabla B_\alpha - B_i\omega^i_\alpha - (\tau+2)\Lambda_{q\alpha}\omega^q_{n+1} - \tau(M_{i\alpha}\omega^i_{n+1} + H_{\beta\alpha}\omega^\beta_{n+1}) = \tilde B_{\alpha\varkappa}\omega^\varkappa,$$

$$\nabla B_{n+1} - B_\sigma\omega^\sigma_{n+1} - (\tau+2)\Lambda_{qn+1}\omega^q_{n+1} - \tau(M_{in+1}\omega^i_{n+1} + H_{\alpha n+1}\omega^\alpha_{n+1}) = \tilde B_{n+1\varkappa}\omega^\varkappa.$$

Строим величины:

$$A^p_{n+1} = \mathcal{L}^p_{n+1} - \mathcal{L}^p\mathcal{L}^q K_q - \mathcal{L}^p(K_i a^i + K_\alpha a^\alpha) + K^p_i a^i + K^p_\alpha a^\alpha + \mathcal{L}^p_i a^i + \mathcal{L}^p_\alpha a^\alpha,$$

$$Q^s = -\tilde A^s_q A^q_{n+1}, \quad a_{ij} = \frac12(M_{ij}+M_{ji}), \quad a_{\alpha\beta} = \frac12(H_{\alpha\beta}+H_{\beta\alpha}),$$

$$d_{pn+1} = \frac12\left(\Lambda_{pn+1} + \frac{B_p}{\tau+2} - \Lambda_{p\alpha}a^\alpha - \Lambda_{pi}a^i\right) + K_p,$$

$$d_{in+1} = \frac12\left(M_{in+1} + \frac{B_i}{\tau}\right) - \hat a_i + \frac{2-\tau}{2\tau} Q^p\Lambda_{pi},$$

$$d_{\alpha n+1} = \frac12\left(H_{\alpha n+1} + \frac{B_\alpha}{\tau}\right) - \hat a_\alpha + \frac{2-\tau}{2\tau}Q^p\Lambda_{p\alpha},$$

$$d_{n+1,n+1} = 2(a^i\hat a_i + a^\alpha \hat a_\alpha - K_pQ^p) - \left(\Lambda_{pn+1} + \frac{B_p}{\tau+2}\right)Q^p - \left(H_{\alpha,n+1}+\frac{B_\alpha}{\tau}\right)a^\alpha - \left(M_{in+1} + \frac{B_i}{\tau}\right)a^i - a_{pq}Q^pQ^q - a_{ij}a^ia^j - (M_{i\alpha}+H_{\alpha i})a^ia^\alpha - a_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta - \frac{2}{\tau}\Lambda_{p\alpha}Q^pa^\alpha - \frac{2}{\tau}\Lambda_{pi}Q^pa^i,$$

$$p_{pn+1} = -(a_{pq}Q^q - K_p + \Lambda_{p\alpha}a^\alpha + \Lambda_{pi}a^i),$$

$$p_{in+1} = -(a_{ij}a^j + \frac12(M_{i\alpha}+H_{\alpha i})a^\alpha + \Lambda_{pi}Q^p + \hat a_i,$$

$$p_{\alpha,n+1} = -(a_{\alpha\beta}a^\beta + \frac12(M_{i\alpha}+H_{\alpha i})a^i + \Lambda_{p\alpha}Q^p + \hat a_\alpha,$$

$$p_{n+1,n+1} = 2(a^i\hat a_i + a^\alpha\hat a_\alpha - K_pQ^p + \Lambda_{p\alpha}Q^pa^\alpha + \Lambda_{pi}Q^pa^i) + a_{pq}Q^pQ^q + a_{ij}a^ia^j + a_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta + (M_{i\alpha}+H_{\alpha i})a^ia^\alpha,$$

дифференциальные уравнения которых записываются в виде

$$\nabla_\delta A^q_{n+1} - 2A^q_{n+1}\pi^{n+1}_{n+1} - A^q_p\pi^p_{n+1} = 0,$$

$$\nabla Q^s - Q^s\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^s_{n+1} = Q^s_\varkappa\omega^\varkappa, \quad \nabla_\delta a_{ij} + a_{ij}\pi^{n+1}_{n+1} = 0,$$

$$\nabla_\delta a_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}\pi^{n+1}_{n+1} - \frac12(M_{i\beta}+H_{\beta i})\pi^i_\alpha - \frac12(M_{i\alpha}+H_{\alpha i})\pi^i_\beta = 0,$$

$$\nabla_\delta d_{pn+1} - \Lambda_{pi}\pi^i_{n+1} - \Lambda_{p\alpha}\pi^\alpha_{n+1} - a_{pq}\pi^q_{n+1} = 0,$$

$$\nabla_\delta d_{in+1} - \Lambda_{pi}\pi^p_{n+1} - a_{ij}\pi^j_{n+1} - \frac12(M_{i\alpha}+H_{\alpha i})\pi^\alpha_{n+1} = 0,$$

$$\nabla_\delta d_{\alpha,n+1} - d_{in+1}\pi^i_\alpha - \Lambda_{p\alpha}\pi^p_{n+1} - a_{\alpha\beta}\pi^\beta_{n+1} - \frac12(M_{i\alpha}+H_{\alpha i})\pi^i_{n+1} = 0,$$

$$\delta d_{n+1,n+1} - d_{n+1,n+1}\pi^{n+1}_{n+1} - 2d_{pn+1}\pi^p_{n+1} - 2d_{in+1}\pi^i_{n+1} - 2d_{\alpha n+1}\pi^\alpha_{n+1} = 0,$$

$$\nabla_\delta p_{p,n+1} - \Lambda_{pi}\pi^i_{n+1} - \Lambda_{p\alpha}\pi^\alpha_{n+1} - a_{pq}\pi^q_{n+1} = 0,$$

$$\nabla_\delta p_{i,n+1} - \Lambda_{pi}\pi^p_{n+1} - a_{ij}\pi^j_{n+1} + \frac{1}{2}(M_{i\alpha} + H_{\alpha i})\pi^\alpha_{n+1} = 0,$$

$$\nabla_\delta p_{\alpha,n+1} - p_{i,n+1}\pi^i_\alpha - \Lambda_{p\alpha}\pi^p_{n+1} - a_{\alpha\beta}\pi^\beta_{n+1} - \frac{1}{2}(M_{i\alpha} + H_{\alpha i})\pi^i_{n+1} = 0,$$

$$\delta p_{n+1,n+1} - p_{n+1,n+1}\pi^{n+1}_{n+1} - 2p_{p,n+1}\pi^p_{n+1} - 2p_{in+1}\pi^i_{n+1} - 2p_{\alpha n+1}\pi^\alpha_{n+1} = 0.$$

2. Уравнение соприкасающейся гиперквадрики Q_n относительно некоторого локального репера имеет вид:

$$A_{JK}x^J x^K + 2A_J x^J + A = 0, \quad A_{JK} = A_{KJ}.$$

С помощью построенных объектов получено два поля инвариантных соприкасающихся гиперквадрик распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$, уравнения которых записываются в виде:

$$a_{pq}x^p x^q + 2\Lambda_{pi}x^p x^i + 2\Lambda_{p\alpha}x^p x^\alpha + 2d_{pn+1}x^p x^{n+1} + (M_{i\alpha} + H_{\alpha i})x^i x^\alpha +$$
$$+ 2d_{in+1}x^i x^{n+1} + 2d_{\alpha n+1}x^\alpha x^{n+1} + a_{ij}x^i x^j + a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + (d_{n+1,n+1} + \sigma\hat{B})x^{n+1}x^{n+1} - 2x^{n+1} = 0,$$

$$a_{pq}x^p x^q + 2\Lambda_{pi}x^p x^i + 2\Lambda_{p\alpha}x^p x^\alpha + 2p_{p,n+1}x^p x^{n+1} + (M_{i\alpha} + H_{\alpha i})x^i x^\alpha + 2p_{in+1}x^i x^{n+1} +$$
$$+ 2p_{\alpha n+1}x^\alpha x^{n+1} + a_{ij}x^i x^j + a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + (p_{n+1,n+1} + \sigma\hat{B})x^{n+1}x^{n+1} - 2x^{n+1} = 0,$$

где σ -некоторый инвариантный параметр.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий//Тр.Моск.математ. о-ва.М.,1953.Т.2.С.275-382.

2. Ю ш к е в и ч Т.Н. К геометрии аффинного трехсоставного распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград,1986.Вып.17.С.114-117.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.18 1987

УДК 514.75

О P-ПОВЕРХНОСТЯХ В E_n С ОБЩИМ СЕМЕЙСТВОМ СРЕДНИХ НОРМАЛЕЙ

А.С.Г р и ц а н с
(Даугавпилсский пединститут)

В работе изучаются свойства однопараметрического семейства p-мерных поверхностей в E_n с общим семейством средних нормалей.

Линейчатая поверхность V_{p+1} называется нормальной [2], если она обладает p-мерной подповерхностью V_p, ортогонально пересекающей все образующие. Если уравнение V_p есть $\vec{x} = \vec{x}(v^1, \dots, v^p)$, то и поверхности $\hat{V}_p$: $\vec{y} = \vec{x} + t\vec{e}_0$, $t = \text{const.}$, где $\vec{e}_0$ -направляющий орт образующей, будут ортогональны образующим. Отнесем поверхность $V_p \subset E_n$ к подвижному реперу $\{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$ ($i,j = \overline{1,p}$; $\alpha,\beta = \overline{p+1,n}$), где орты $\vec{e}_i$ принадлежат касательной плоскости $T_p(x)$ к V_p, а векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормального пространства $N_{n-p}(x)$ поверхности V_p. Следовательно, $\vec{e}_0$ можно включить в репер поверхности V_p. Деривационные формулы репера имеют вид: $d\vec{x} = \omega^i\vec{e}_i$, $d\vec{e}_i = \omega^j_i\vec{e}_j + \omega^\alpha_i\vec{e}_\alpha$, $d\vec{e}_\alpha = \omega^i_\alpha\vec{e}_i + \omega^\beta_\alpha\vec{e}_\beta$. Продолжая систему уравнений $\omega^\alpha = 0$ поверхности V_p, получим $\omega^\alpha_i = b^\alpha_{ij}\omega^j$, $b^\alpha_{ij} = b^\alpha_{ji}$. Уравнение поверхности V_{p+1} можно записать в виде

$$\vec{R} = \vec{x} + t\vec{e}_0. \tag{1}$$

Дифференцируя (1), находим $d\vec{R} = \Omega^{\hat{i}}\vec{E}_{\hat{i}}$, $\Omega^0 = dt$, $\Omega^i = \omega^i$, $\vec{E}_0 = \vec{e}_0$, $\vec{E}_i = \vec{e}_i + t\vec{a}_i$, $d\vec{e}_0 = \vec{a}_i\omega^i$ $(\hat{i},\hat{j} = 0,1,\dots,p)$. В дальнейшем предполагается, что $\vec{a}_i$ -линейно независимы. Компоненты метрического тензора $G_{\hat{i}\hat{j}} = \vec{E}_{\hat{i}}\vec{E}_{\hat{j}}$ поверхности V_{p+1} имеют вид:

$$G_{00} = 1, \; G_{0i} = G_{i0} = 0, \; G_{ij} = \gamma_{ij} - 2tb^0_{ij} + t^2\bar{\gamma}_{ij}, \; G^{00} = \frac{1}{G}, \; G^{0i} = G^{i0} = 0,$$

$$G^{ij} = \frac{1}{G}A^{ij}_v t^v \quad (u,v = 0,1,\dots,2p-2), \; A^{ij}_0 = \gamma\gamma^{ij}, \dots, A^{ij}_{2p-2} = \bar{\gamma}\bar{\gamma}^{ij},$$